Exercices d'oraux de la banque CCP 2014-2015 - Corrigés

BANQUE ALGÈBRE

EXERCICE 59

êxtbf1) **(a)** Si $P \neq 0$, $\deg(f(P)) = \textsc{deg}(P - P') = \deg(P)$ et en particulier, $f(P) \neq 0$. Par contraposition, $\forall P \in E$, $[f(P) = 0 \Rightarrow P = 0]$. Donc le noyau de l'endomorphisme f est $\{0\}$.
Par suite f est un endomorphisme injectif de l'espèce de dimension finie E. On sait que f est un automorphisme de E. En particulier, f est bijectif.

(b) $f(1) = 1$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $f\left(X^k\right) = X^k - kX^{k-1}$. Donc la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K}).$$

Le déterminant de la matrice triangulaire A est égal à 1 et en particulier n'est pas nul. Donc, $A \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ ou encore $f \in GL(E)$.

2) Soit $Q \in E$. $Q^{(n+1)} = 0$ et donc

$$\begin{aligned} Q &= Q - Q^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(Q^{(k)} - Q^{(k+1)}\right) \text{ (somme télescopique)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(Q^{(k)}\right) = f\left(\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}\right) \text{ (car deg} \left(\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}\right) = \deg(Q) \leqslant n). \end{aligned}$$

Le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$ est un élément de E tel que $f(P) = Q$. On sait de plus que le polynôme P est uniquement défini.

EXERCICE 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$f(M) = AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & c+2d \\ 2a+4b & 2c+4d \end{pmatrix}.$$

Ensuite,

$$M \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a + 4b = 0 \\ c + 2d = 0 \\ 2c + 4d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = -2d \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\begin{pmatrix} -2b & -2d \\ b & d \end{pmatrix}, \ (b, d) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

2) En particulier, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ car par exemple, la matrice non nulle $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Ker}(f)$. Puisque f est un endomorphisme de l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, on sait que f n'est ni injectif, ni surjectif.

3) • D'après la question 1), $\text{Ker}(f) = \left\{ b \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ (b, d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(B, C)$ où $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (B, C) est déjà une famille génératrice de $\text{Ker}(f)$. De plus, les matrices B et C ne sont pas colinéaires et donc la famille (B, C) est libre. Finalement, (B, C) est une base de $\text{Ker}(f)$.

• D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) - \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2$.
La matrice $D = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice $E = \dfrac{1}{2} f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\text{Im}(f)$. De plus, les matrices D et E ne sont pas colinéaires. Donc, (D, E) est une base de $\text{Im}(f)$.

EXERCICE 62

1) Soit $x \in E$. $x \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(g \circ f)$. Ceci montre que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$.

Réciproquement, pour $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(g \circ f) &\Rightarrow g(f(x)) = 0 \Rightarrow f(g(f(x))) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) = 0 \text{ (car } f \circ g = \text{Id)} \\ &\Rightarrow x \in \text{Ker}(f). \end{aligned}$$

Ceci montre que $\text{Ker}(g \circ f) \subset \text{Ker}(f)$.

On a montré que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$.

2) Pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) \in \text{Im}(g)$. Ceci montre que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Réciproquement, puisque $f \circ g = \text{Id}$, pour tout $x \in E$, $g(x) = g(f(g(x))) \in \text{Im}(g \circ f)$. Ceci montre que $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(g \circ f)$.

On a montré que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.

3) Puisque $f \circ g = \text{Id}$,

$$(g \circ f)^2 = g \circ f \circ g \circ f = g \circ \text{Id} \circ f = g \circ f.$$

Donc, $g \circ f$ est un projecteur. On sait alors que $E = \text{Ker}(g \circ f) \oplus \text{Im}(g \circ f) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$ (que l'on soit en dimension finie ou pas).

On a montré que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$.

EXERCICE 64

1) Dans cette question, on suppose que $E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f$.

• Pour tout $x \in E$, $f^2(x) = f(f(x)) \in \text{Im}(f)$. Ceci montre que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

• Soit $x \in E$. Puisque $E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f$, il existe $(y, z) \in E \times \text{Ker}(f) /\ x = f(y) + z$. Mais alors, $f(x) = f(f(y)) + f(z) = f^2(z)$. Donc, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \text{Im}(f^2)$. Ceci montre que $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$ et finalement que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.

On a montré que : $E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f \Rightarrow \text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

2) (a) D'après la question 1), on a toujours $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$. Puisque $\dim(E) + \infty$, on en déduit que $\text{Im}f = \text{Im}f^2 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}f) = \dim(\text{Im}f^2)$.

D'autre part, on a toujours $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$. En effet, pour tout $x \in E$,

$$x \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(f^2).$$

Par suite, $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Im}(f^2))$. Mais alors, le théorème du rang permet d'écrire

$$\begin{aligned} \text{Im}f = \text{Im}f^2 &\Leftrightarrow \dim(\text{Im}f) = \dim(\text{Im}f^2) \Leftrightarrow n - \dim(\text{Ker}f) = n - \dim(\text{Ker}f^2) \Leftrightarrow \dim(\text{Ker}f) = \dim(\text{Ker}f^2) \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}f = \text{Ker}f^2. \end{aligned}$$

On a montré que $\text{Im}f = \text{Im}f^2 \Leftrightarrow \text{Ker}f = \text{Ker}f^2$.

(b) On suppose dans cette question que $\text{Im}f = \text{Im}f^2$. D'après la question précédente, $\text{Ker}f = \text{Ker}f^2$.

Soit $x \in \text{Im}f \cap \text{Ker}f$. Donc $f(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. On en déduit que $f^2(y) = 0$ et donc que $y \in \text{Ker}f^2 = \text{Ker}f$ puis que $x = f(y) = 0$. Ceci montre que $\text{Im}f \cap \text{Ker}f = \{0\}$.
D'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Ker}f) = n$.

En résumé, $\text{Im}f \cap \text{Ker}f = \{0\}$ et $\dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Ker}f) = n$. On sait alors que $E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f$.

On a montré que $\text{Im}f = \text{Im}f^2 \Rightarrow E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f$.

EXERCICE 71

Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1) $D = \text{Vect}(v_3)$ où $v_3 = (1, 2, 3)$. Puisque $1 + 2 + 3 = 6 \neq 0$, $v_3 \notin P$ et donc $D \cap P = \{0\}$. Comme d'autre part, $\dim(P) + \dim(D) = 2 + 1 = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) < +\infty$, on en déduit que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$u - \lambda v_3 \in P \Leftrightarrow (x - \lambda, y - 2\lambda, z - 3\lambda) \in P \Leftrightarrow x - \lambda + y - 2\lambda + z - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{6}(x + y + z).$$

Le projeté de u sur P parallèlement à D est

$$p(u) = u - \frac{x+y+z}{6}v_3 = (x, y, z) - \frac{x+y+z}{6}(1, 2, 3) = \left(\frac{5x-y-z}{6}, \frac{-2x+4y-2z}{6}, \frac{-3x-3y+3z}{6}\right).$$

Puisque $\begin{pmatrix} \dfrac{5x-y-z}{6} \\ \dfrac{-2x+4y-2z}{6} \\ \dfrac{-3x-3y+3z}{6} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Une base de P est (v_1, v_2) où $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (1, 0, -1)$. Puisque $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$, on sait que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, la matrice de p est $\text{diag}(1, 1, 0)$.

Une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale est donc (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1)$ et $v_3 = (1, 2, 3)$.

EXERCICE 76

1) (a) Inégalité de Cauchy-Schwarz. $\forall x \in E$, $|(x|y)| \leqslant \|x\| \times \|y\|$.

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $P(\lambda) = \|\lambda x - y\|^2$. On a d'une part $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) \geqslant 0$ et d'autre part $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) = \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda(x|y) + \|y\|^2$.

1er cas. Si $x = 0$, $|(x|y)| = 0$ et $\|x\| \times \|y\| = 0$. Dans ce cas, $|(x|y)| = \|x\| \times \|y\| = 0$ et en particulier, l'inégalité est vraie.

2ème cas. Si $x \neq 0$, P est un trinôme du second degré, positif sur $\mathbb{R}$. On sait alors que son discriminant réduit est négatif ou nul ce qui fournit

$$0 \geqslant \Delta' = (x|y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2.$$

Par suite, $(x|y)^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$ puis, en prenant la racine carrée des deux membres, $(x|y) \leqslant \|x\| \times \|y\|$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est démontrée dans tous les cas.

(b) Cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. $\forall x \in E$, $|(x|y)| = \|x\| \times \|y\| \Leftrightarrow (x, y)$ liée.

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$. D'après 1)

$$\begin{aligned} |(x|y)| = \|x\| \times \|y\| &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \Delta' = 0) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}/\ P(\lambda_0) = 0) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}/\ \|\lambda_0 x - y\|^2 = 0) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}/\ y = \lambda_0 x) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \text{ liée.} \end{aligned}$$

Le résultat est démontré.

2) Posons $F = \left\{\int_a^b f(t)\ dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\ dt,\ f \in E\right\}$.

On sait que l'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\ dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On note $\|\ \|$ la norme associée.

Soit $f \in E$. Les fonctions f et $\frac{1}{f}$ sont continues sur $[a, b]$. Donc, $\int_a^b f(t)\ dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\ dt$ existe. De plus, puisque les fonctions f et $\frac{1}{f}$ sont positives sur $[a, b]$,

$$\int_a^b f(t)\ dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\ dt = \int_a^b \left(\sqrt{f(t)}\right) 2\ dt \times \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2 dt = \left\|\sqrt{f}\right\|^2 \left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\right\|^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'affirmer que

$$\int_a^b f(t)\ dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\ dt \geqslant \left(\sqrt{f}\ |\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \times \frac{1}{\sqrt{f(t)}}\ dt\right)^2 = (b-a)^2.$$

Le nombre $(b-a)^2$ est donc un minorant de l'ensemble F. De plus, si f est la fonction constante $x \mapsto 1$, f est un élément de E tel que $\int_a^b f(t)\ dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\ dt = (b-a)^2$.

Ceci prouve que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)\ dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\ dt,\ f \in E\right\}$ admet un minimum et en particulier une borne inférieure m et que $m = (b-a)^2$.

EXERCICE 77

1) Soit A un sous-espace vectoriel de E.

Soit $x \in A$. Alors $\forall y \in A^\perp$, $(x|y) = 0$ et donc $x \in \left(A^\perp\right)^\perp$. Ceci montre que $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$. D'autre part, puisque E est de dimension finie,

$$\dim\left(\left(A^\perp\right)^\perp\right) = \dim(E) - \dim\left(A^\perp\right) = \dim(E) - (\dim(E) - \dim(A)) = \dim(A).$$

En résumé, A est un sous-espace vectoriel de $\left(A^\perp\right)^\perp$ et $\dim(A) = \dim\left(\left(A^\perp\right)^\perp\right) < +\infty$. On en déduit que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.

2) (a) • $F \subset (F+G)$ et $G \subset (F+G)$. Donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F+G)^\perp \subset G^\perp$ puis $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
• Un élément de $F^\perp \cap G^\perp$ est orthogonal à tout élément de F et de G puis à toute somme d'un élément de F et de G par bilinéarité du produit scalaire et est donc dans $(F+G)^\perp$. Ceci montre que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.
Finalement, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

(b) D'après les deux questions précédentes,

$$\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp = \left(F^\perp\right)^\perp \cap \left(G^\perp\right)^\perp = F \cap G.$$

En prenant l'orthogonal des deux membres, on obtient

$$(F \cap G)^\perp = \left(\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp\right)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

On a montré que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

EXERCICE 78

1) (a) Soit $(x, y) \in E^2$. D'après une identité de polarisation,

$$\begin{aligned}(u(x) \mid u(y)) &= \frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \frac{1}{4}\|u(x)-u(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \frac{1}{4}\|u(x-y)\|^2\right) \text{ (car } u \text{ est linéaire)}\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2\right) \text{ (par hypothèse sur } u\text{)}\\ &= (x \mid y).\end{aligned}$$

On a montré que : $\forall(x,y) \in E^2$, $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.

(b) Soit $x \in E$. Puisque u conserve la norme,

$$x \in \operatorname{Ker}(u) \Rightarrow u(x) = 0 \Rightarrow \|u(x)\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Donc $\operatorname{Ker}(u) = \{0\}$. Puisque E est de dimension finie, on sait que u est bijectif.

2) Montrons que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe du groupe $(GL(E), \circ)$.

• D'après la question précédente, $\mathcal{O}(E) \subset GL(E)$ et d'autre part, $Id_E \in \mathcal{O}(E)$.

• Soit $(u,v) \in (\mathcal{O}(E))^2$. Pour tout x de E

$$\|v \circ u(x)\| = \|v(u(x))\| = \|u(x)\| = \|x\|.$$

Donc $v \circ u \in \mathcal{O}(E)$.
• Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Pour tout x de E

$$\left\|u^{-1}(x)\right\| = \left\|u\left(u^{-1}(x)\right)\right\| = \|x\|.$$

Donc $u^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

On a montré que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe du groupe $(GL(E), \circ)$. En particulier, $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un groupe.

3) $\Rightarrow$ /. Supposons que $u \in \mathcal{O}(E)$. Donc u conserve le produit scalaire. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Mais alors

$$(u(e_i) | u(e_j)) = (e_i | e_j) = \delta_{i,j} \text{ (symbole de } \textsc{Kronecker}).$$

Ceci montre que $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une famille orthonormée de E. On sait qu'une telle famille est libre. Puisque d'autre part, $\operatorname{card}(u(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n} = n = \dim(E) < +\infty$, la famille $(u(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormée de E.

$\Leftarrow$ /. Supposons que $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ soit une base orthonormée de E.

Soit $x \in E$. Posons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\|u(x)\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)\right\|\\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \text{ (car la base } (u(e_1), \ldots, u(e_n)) \text{ est orthonormée)}\\ &= \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\| \text{ (car la base } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est orthonormée)}\\ &= \|x\|.\end{aligned}$$

Ceci montre que $u \in \mathcal{O}(E)$.

On a montré que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

EXERCICE 79

1) Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Supposons $h \neq 0$. Il existe donc $x_0 \in [a,b]$ tel que $h(x_0) > 0$. Puisque h est continue en x_0, il existe deux réels u et v tels que $u < v$ et $x_0 \in [u,v]$ et $\forall x \in [u,v]$,

$$h(x) \geqslant h(x_0) - \frac{h(x_0)}{2} = \frac{h(x_0)}{2}.$$

Puisque h est positive, on en déduit que

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_{[u,v]} h(x)\,dx + \int_{[a,b]\setminus[u,v]} h(x)\,dx \geqslant (v-u)\frac{h(x_0)}{2} + 0 = (v-u)\frac{h(x_0)}{2} > 0.$$

Ainsi, $h \neq 0 \Rightarrow \int_a^b h(x)\,dx \neq 0$. Par contraposition, on a montré que $\int_a^b h(x)\,dx = 0 \Longrightarrow h = 0$.

2) • Soit $(f,g) \in E^2$. Alors la fonction $f \times g$ est continue sur le segment $[a,b]$. Donc $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ existe. Ainsi, $(\ |\ )$ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.

• Soit $(f,g) \in E^2$. $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = (g|f)$. Donc, $(\ |\ )$ est symétrique.

• Soient $(f_1,f_2,g) \in E^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégration,

$$(\lambda f_1 + \mu f_2|g) = \int_a^b (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x))\,g(x)\,dx = \lambda\int_a^b f_1(x)g(x)\,dx + \mu\int_a^b f_2(x)g(x)\,dx = \lambda\,(f_1|g) + \mu\,(f_2|g)\,.$$

Donc, $(\ |\ )$ est linéaire par rapport à sa première variable. Par symétrie, $(\ |\ )$ est une forme bilinéaire symétrique.

• Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégration, $(f|f) = \int_a^b f^2(x)\,dx \geqslant 0$. Donc $(\ |\ )$ est une forme bilinéaire symétrique positive. De plus,

$$\begin{aligned}(f|f) = 0 &\Rightarrow \int_a^b f^2(x)\,dx = 0\\ &\Rightarrow \forall x \in [a,b],\ f^2(x) = 0 \text{ (fonction continue positive, d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow f = 0.\end{aligned}$$

Donc $(\ |\ )$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

On a montré que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur E.

3) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,dx &= \left|\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,dx\right|\\ &\leqslant \sqrt{\int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx} \times \sqrt{\int_0^1 \left(e^{-x}\right)^2 dx} = \sqrt{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1} \times \sqrt{\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1-e^{-2}}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{e^2-1}}{2e}.\end{aligned}$$

Donc, $0 \leqslant \int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,dx \leqslant \frac{\sqrt{e^2-1}}{2e} = 0,46\ldots$

EXERCICE 80

1) Le produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Donc E est stable pour la multiplication des fonctions.

• Soit $(f,g) \in E^2$. Alors la fonction $f \times g$ est continue sur le segment $[0,2\pi]$. Donc $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ existe. Ainsi, $(\ |\ )$ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.

• Soit $(f,g) \in E^2$. $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)f(x)\,dx = (g|f)$. Donc, $(\ |\ )$ est symétrique.

• Soient $(f_1, f_2, g) \in E^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégration,

$$(\lambda f_1 + \mu f_2|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x))\, g(x)\, dx = \lambda \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)g(x)\, dx + \mu \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x)g(x)\, dx = \lambda\,(f_1|g) + \mu\,(f_2|g)\,.$$

Donc, $(\ |\ )$ est linéaire par rapport à sa première variable. Par symétrie, $(\ |\ )$ est une forme bilinéaire symétrique.

• Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégration, $(f|f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx \geqslant 0$. Donc $(\ |\ )$ est une forme bilinéaire symétrique positive. De plus,

$$\begin{aligned}(f|f) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx = 0\\ &\Rightarrow \forall x \in [0, 2\pi],\ f^2(x) = 0 \text{ (fonction continue positive, d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow f = 0 \text{ (car } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique)}.\end{aligned}$$

Donc $(\ |\ )$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

On a montré que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur E.

2) Pour tout réel x, $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos x = v(x) + w(x)$ où $v(x) = -\dfrac{1}{2}\cos x = -\dfrac{1}{2}f(x)$ et $w(x) = \dfrac{1}{2}$. Déjà $v \in F$.
D'autre part, $(f, w) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = 0$ et $(g, w) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2x)\, dx = 0$ et donc $w \in (f, g)^{\perp} = F^{\perp}$.

On en déduit que le orthogonal sur F de la fonction $u\ :\ x \mapsto \sin^2 x$ est la fonction $v\ :\ x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos x$.

EXERCICE 81

1) $\mathcal{F} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(I, R)$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Ceci montre que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$M \in \mathcal{F}^{\perp} \Leftrightarrow M \in (\mathrm{Vect}(I, R))^{\perp} \Leftrightarrow M \in (I, R)^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(I, M) = \varphi(R, M) = 0.$$

• $\varphi(I, M) = \mathrm{Tr}\left({}^tIM\right) = \mathrm{Tr}(M) = a + d$.

• ${}^tRM = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -d \\ a & c \end{pmatrix}$. Donc $\varphi(R, M) = -b + c$.

Par suite,

$$M \in \mathcal{F}^{\perp} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + d = 0 \\ -b + c = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d = a \\ c = b \end{array}\right..$$

Ainsi, $\mathcal{F}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(S, T)$ où $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus, la famille (S, T) est clairement libre et donc une base de $\mathcal{F}^{\perp}$ est (S, T) où $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) 1ère solution. $J = I + T$ avec $I \in \mathcal{F}$ et $T \in \mathcal{F}^{\perp}$. Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}^{\perp}$ est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2ème solution. Déterminons l'orthonormalisée de la famille libre (S, T). On note $\|\ \|$ la norme associée au produit scalaire φ.

• ${}^tST = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\varphi(S, T) = 0$. La famille (S, T) est déjà une famille orthogonale.

• $S = \mathrm{diag}(1, -1)$ puis ${}^tSS = S^2 = I$. Donc $\|S\| = \sqrt{\mathrm{Tr}\left({}^tSS\right)} = \sqrt{2}$.

• ${}^t\mathsf{T}\mathsf{T} = \mathsf{T}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$. Donc $\|\mathsf{T}\| = \sqrt{\mathrm{Tr}\,({}^t\mathsf{T}\mathsf{T})} = \sqrt{2}$.

Une base orthonormale de $\mathcal{F}^\perp$ est (S_0, T_0) où $S_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$ est la matrice

$$K = \varphi(S_0, J)\, S_0 + \varphi(T_0, J)\, T_0.$$

• ${}^tS_0J = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ puis $\varphi(S_0, J) = \mathrm{Tr}\,({}^tS_0J) = 0$.
• ${}^tT_0J = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $\varphi(T_0, J) = \mathrm{Tr}\,({}^tT_0J) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = \sqrt{2}$.

Mais alors $K = \varphi(S_0, J)\, S_0 + \varphi(T_0, J)\, T_0 = \sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T$.

La projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) On sait que $d(J, F) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\| = \|p_{\mathcal{F}^\perp}(J)\| = \|T\| = \sqrt{\mathrm{Tr}\,({}^tTT)}$ avec ${}^tTT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$\boxed{d(J, F) = \sqrt{2}.}$$

EXERCICE 82

1) 1ère solution. $(\,.\,|\,.\,)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en particulier, $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2ème solution.

• $(\,.\,|\,.\,)$ est une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

• Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd' = a'a + b'b + c'c + d'd = (A|A').$$

Donc $(\,.\,|\,.\,)$ est symétrique.

• Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ et $A'' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$ trois éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(\lambda A + \mu A'|A'') &= (\lambda a + \mu a')\, a'' + (\lambda b + \mu b')\, b'' + (\lambda c + \mu c')\, c'' + (\lambda d + \mu d')\, d'' \\ &= \lambda(aa'' + bb'' + cc'' + dd'') + \mu(a'a'' + b'b'' + c'c'' + d'd'') \\ &= \lambda\,(A|A'') + \mu\,(A'|A'').\end{aligned}$$

Donc $(.|.)$ est linéaire par rapport à sa première variable puis, par symétrie, $(.|.)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$(A|A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 0.$$

Donc $(.|.)$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus,

$$(A|A)\, 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Finalement, $(.|.)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou encore $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Notons $\mathcal{T}_s$ l'espace des matrices triangulaires supérieures.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_s$ et bien sûr $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_s{}^{\perp}$. En effet, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le produit scalaire de A et de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est $a \times 0 + b \times 0 + c \times 0 + 0 \times (-1)$ c'est-à-dire 0.

On sait que

$$d(A, \mathcal{T}_s) = \|A - B\| = \|C\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1.$$

La distance de A au sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures est égale à 1.

EXERCICE 84

1) Soit z un nombre complexe non nul. Un argument de z est un réel θ tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

2) Soit z un nombre complexe. $z^n = 1 \Rightarrow |z^n| = 1 \Rightarrow |z|^n = 1 \Rightarrow |z| = 1$. Posons donc $z = e^{i\theta}$ où θ est un réel.

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\Leftrightarrow \left(e^{i\theta}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{in\theta} = 1 \text{ (d'après la formule de }\textsc{Moivre}) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ n\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}. \end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. La division euclidienne de k par n s'écrit $k = qn + r$ où q et r sont deux entiers relatifs tels que $0 \leqslant q \leqslant n - 1$. On a alors

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i(qn+r)\pi}{n}} = e^{\frac{2ir\pi}{n} + 2iq\pi} = e^{\frac{2ir\pi}{n}}.$$

Ainsi, l'équation $z^n = 1$ admet pour solutions les nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$. Enfin, l'application $\begin{array}{ccc} [0, 2\pi[& \to & U \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$ est injective et, puisque pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi[$, les n nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, sont deux à deux distincts.

On a montré que l'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions deux à deux distinctes à savoir les nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$.

3) Montrons que les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ sont réelles.
Soient A, B et M les points d'affixes respectives $-i$, i et z.

$$\begin{aligned} (z + i)^n = (z - i)^n &\Rightarrow |(z + i)^n| = |(z - i)^n| \Rightarrow |z + i|^n = |z - i|^n \Rightarrow |z + i| = |z - i| \\ &\Rightarrow AM = BM \Rightarrow M \in \text{med}([AB]) \Rightarrow M \in (Ox) \\ &\Rightarrow z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Résolvons alors l'équation proposée. Puisque le nombre i n'est pas solution de l'équation

$$\begin{aligned} (z + i)^n = (z - i)^n &\Leftrightarrow \left(\frac{z + i}{z - i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z + i}{z - i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \end{aligned}$$

- Si $k = 0$, $z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \Leftrightarrow 0 \times z = -2i$. Cette équation n'a pas de solution.
- Si $1 \leqslant k \leqslant n - 1$,

$$\begin{aligned} z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) &\Leftrightarrow z = \frac{-i\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} \Leftrightarrow z = \frac{-ie^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-i \times 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \Leftrightarrow z = \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ sont les nombres de la forme $\cotan\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Ce sont effectivement des réels.

EXERCICE 85

1) (a) D'après la formule de Taylor, la décomposition de $P(x)$ dans la base

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

(b) Soit $r \in [\![1, n]\!]$. D'après la formule de Taylor,

$$P = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k + (X-a)^r \sum_{k=r}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-r}.$$

Puisque $\deg\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k\right) \leqslant r-1$, $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^r$. Par suite,

$$\begin{aligned} a \text{ est une racine de } P \text{ d'ordre au moins } r &\Leftrightarrow (X-a)^r | P \Leftrightarrow R = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![0, r-1]\!],\ P^{(k)}(a) = 0. \end{aligned}$$

car la famille $\left(1, X-a), \ldots, (X-a)^{r-1}\right)$ est libre. Ensuite

$$\begin{aligned} a \text{ est une racine de } P \text{ d'ordre } r \text{ exactement} &\Leftrightarrow a \text{ est une racine de } P \text{ d'ordre au moins } r \text{ et pas d'ordre au moins } r+1 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![0, r-1]\!],\ P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } \overline{\forall k \in [\![0, r]\!],\ P^{(k)}(a) = 0} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![0, r-1]\!],\ P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } P^{(r)}(a) \neq 0. \end{aligned}$$

2) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} 1 \text{ racine double de } X^5 + aX^2 + bX &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \\ P''(1) \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 + a + b = 0 \\ 5 + 2a + b = 0 \\ 20 + 2a \neq 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -4 \\ b = 3 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Il existe un et un seul polynôme P solution à savoir le polynôme $P = X^5 - 4X^2 + 3X$. De plus

$$P = X(X-1)\left(X^3 + X^2 + X - 3\right) = X(X-1)^2\left(X^2 + 2X + 3\right).$$

Le discriminant réduit du trinôme $X^2 + 2X + 3$ est égal à $-2 < 0$. Donc la factorisation de P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ est $P = X(X-1)^2\left(X^2 + 2X + 3\right)$.

EXERCICE 86

1) (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Supposons que $\text{PGCD}(p, a) = 1$ et $\text{PGCD}(p, b) = 1$.
D'après le théorème de Bézout, il existe $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $pu_1 + av_1 = 1$ et $pu_2 + bv_2 = 1$. En multipliant ces deux égalités membre à membre, on obtient $(pu_1 + av_1)(pu_2 + bv_2) = 1$ puis

$$p(pu_1u_2 + av_1u_2 + bu_1v_2) + ab(v_1v_2) = 1.$$

Puisque $pu_1u_2 + av_1u_2 + bu_1v_2$ et v_1v_2 sont des entiers relatifs, le théorème de Bézout montre que $\text{PGCD}(p, ab) = 1$.

(b) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. $\binom{p}{k} k! = \overbrace{p(p-1)\ldots(p-k+1)}^{k \text{ facteurs}} \in p\mathbb{Z}$. Ainsi, p divise $\binom{p}{k} k!$.
Maintenant, puisque p est premier, p est premier à 2, 3, ..., k. D'après la question précédente, p est premier à $k!$.

Ainsi, p divise $\binom{p}{k} k!$ et p est premier à $k!$. D'après le théorème de Gauss, p divise $\binom{p}{k}$.

On a montré que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.

2) (a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n \mod p$.

- $0^p = 0 \equiv 0 \mod p$. La propriété à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $n^p \equiv n \mod p$ et montrons que $(n+1)^p \equiv n+1 \mod p$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(n+1)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k = 1 + n^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k \\ &\equiv 1 + n^p \mod p \text{ (d'après la question précédente)} \\ &\equiv n+1 \mod p \text{ (par hypothèse de récurrence)}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n \mod p$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que p ne divise pas n. Puisque p est un nombre premier, on en déduit que $\mathrm{PGCD}(p, n) = 1$.

D'après la question précédente, p divise $n^p - n = n\left(n^{p-1} - 1\right)$. Puisque p est premier à n, le théorème de Gauss permet d'affirmer que p divise $n^{p-1} - 1$ ou encore que $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}$, p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

EXERCICE 87

1) Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)) \end{array}$.

- φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$.
- Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors, $P(a_0) = P(a_1) = \ldots = P(a_n) = 0$.
  Le polynôme P a au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes et est de degré inférieur ou égal à n. On sait alors que $P = 0$. Par suite, φ est une application linéaire injective.
- Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = \dim\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) < +\infty$, on en déduit que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Mais alors, pour tout $(b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P) = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ ou encore il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg(P) \leqslant n \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

2) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Puisque $\forall i \in [\![0, n]\!] \setminus \{k\}$, $L_k(a_i) = 0$ et que les a_i sont deux à deux distincts, L_k est divisible par $\prod_{i \neq k} (X - a_i)$. Puisque $\deg(L_k) \leqslant n$, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$$L_k = \lambda \prod_{i \neq k} (X - a_i).$$

La condition $L_k(a_k) = 1$ fournit $\lambda = \dfrac{1}{\prod_{i \neq k} (a_k - a_i)}$ et donc

$$L_k = \prod_{i \neq k} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

3) Soit $p \in [\![0, n]\!]$. $\sum_{k=0}^{p} a_k^p L_k$ et X^p sont deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\sum_{k=0}^{p} a_k^p L_k(a_i) = \sum_{k=0}^{p} a_k^p \delta_{i,k} = a_i^p.$$

Ainsi, $\varphi\left(\sum_{k=0}^{p} a_k^p L_k\right) = \varphi(X^p)$. Puisque φ et injective, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{p} a_k^p L_k = X^p.$$

EXERCICE 88

1)

$$1 \text{ racine d'ordre au moins 2 de } P \Leftrightarrow P(1) = P'(1) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b+1=0 \\ (n+1)a+nb=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow a = n \text{ et } b = -(n+1) \text{ (fourni par les formules de } \textsc{Cramer}\text{)}.$$

Il existe un et un seul polynôme solution à savoir le polynôme $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

2) On sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k = \frac{X^{n+1}-1}{X-1}$. En dérivant, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-}(k+1)X^k = \frac{(n+1)X^n(X-1) - \left(X^{n+1}-1\right)}{(X-1)^2} = \frac{nX^{n+1}-(n+1)X^n+1}{(X-1)^2}.$$

Par suite,

$$\boxed{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = (X-1)^2 \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k.}$$

EXERCICE 89

1) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$$z^k - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{-ik\pi}{n}}\right) = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{ik\pi}{n}} = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

De plus, $0 < \dfrac{\pi}{n} \leqslant \dfrac{k\pi}{n} \leqslant \dfrac{(n-1)\pi}{n} < \pi$ et donc $2\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) > 0$. On en déduit que

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \left|z^k - 1\right| = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ et } \arg\left(z^k-1\right) = \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\ [2\pi].}$$

2)

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n-1}\left|z^k-1\right| = \sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\\
&= 2\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = 2\mathrm{Im}\left(\frac{1-\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}\right)\ (\text{car } e^{\frac{i\pi}{n}}\neq 1)\\
&= 2\mathrm{Im}\left(\frac{2}{e^{\frac{i\pi}{2n}}\left(e^{-\frac{i\pi}{2n}}-e^{\frac{i\pi}{2n}}\right)}\right) = 2\mathrm{Im}\left(\frac{2e^{-\frac{i\pi}{2n}}}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right)\\
&= \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\mathrm{Im}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right) = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\\
&= \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.}$$

EXERCICE 90

1) • Soient $(P,Q)\in E^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$.

$$
\begin{aligned}
\Phi(\lambda P+\mu Q) &= ((\lambda P+\mu Q)(a_1), (\lambda P+\mu Q)(a_2), (\lambda P+\mu Q)(a_3))\\
&= \lambda(P(a_1),P(a_2),P(a_3)) + \mu(Q(a_1),Q(a_2),Q(a_3))\\
&= \lambda\Phi(P)+\mu\Phi(Q).
\end{aligned}
$$

Donc Φ est une application linéaire.

• Soit $P\in\mathrm{Ker}\Phi$. Donc, P s'annule en a_1, a_2 et a_3. Ainsi, P est un polynôme de degré au plus 2 ayant au moins trois racines deux à deux distinctes. On sait alors que $P=0$.
Par suite, $\mathrm{Ker}(\Phi)=\{0\}$ et donc Φ est injectif.

• Enfin, $\dim(\mathbb{K}_2[X]) = 3 = \dim\left(\mathbb{K}^3\right) < +\infty$ et puisque Φ est une application linéaire injective de $(\mathbb{K}_2[X])$ dans $\mathbb{K}^3$, on sait que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2) (a) $(L_1,L_2,L_3) = \left(\Phi^{-1}(e_1),\Phi^{-1}(e_2),\Phi^{-1}(e_3)\right)$. Donc la famille (L_1,L_2,L_3) est l'image de la base (e_1,e_2,e_3) par l'isomorphisme Φ^{-1}. Puisque l'image d'une base par un isomorphisme est une base, (L_1,L_2,L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

(b) Par définition, $L_1(a_1)=1$ et $L_1(a_2)=L_1(a_3)=0$. Puisque a_2 et a_3 sont distincts, le polynôme L_2 est divisible par $(X-a_2)(X-a_3)$. Puisque $\deg(L_1)\leqslant 2$, il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $L_1=\lambda(X-a_2)(X-a_3)$. La condition $L_1(a_1)=1$ fournit $\lambda = \dfrac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$ et donc

$$L_1 = \frac{(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_3)(a_2-a_3)}.$$

En échangeant les rôles de a_1, a_2 et a_3, on obtient

$$\boxed{L_1 = \frac{(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_3)(a_2-a_3)},\ L_2 = \frac{(X-a_1)(X-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}\ \text{et}\ L_3 = \frac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.}$$

3) Soit $P\in\mathbb{K}_2[X]$. Il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{K}^3$ tel que $P=\lambda_1L_1+\lambda_2L_2+\lambda_3L_3$.
Pour tout $(i,j)\in[\![1,3]\!]^2$, on a $L_j(a_i)=\delta_{i,j}$ (symbole de KRONECKER). Donc pour $i\in[\![1,3]\!]$,

$$P(a_i) = \sum_{j=1}^{3}\lambda_jL_j(a_i) = \sum_{j=1}^{3}\lambda_j\delta_{i,j} = \lambda_i.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{K}_2[X],\ P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3.}$$

4) *Application :*

$$P = 1 \times \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} + 3 \times \frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)} + 1 \times \frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)}$$
$$= \frac{1}{2}\left((X-1)(X-2) - 6X(X-2) + X(X-1)\right) = -2X^2 + 4X + 1.$$

$$\boxed{P = -2X^2 + 4X + 1.}$$

EXERCICE 95

1) Théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. PGCD$(a,b) = 1 \Longleftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2/\ au + bv = 1$.

2) 1ère solution. Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Alors PPCM$(a,b) = ab$ puis

$$(a \mid c \text{ et } b \mid c) \Leftrightarrow c \text{ multiple commun à } a \text{ et } b \Leftrightarrow c \text{ multiple de PPCM}(a,b) \Leftrightarrow c \text{ multiple de } ab \Leftrightarrow ab \mid c.$$

2ème solution. Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux.

• Si $ab \mid c$, alors $a \mid ab$ et $ab \mid c$. Par transitivité de $\mid$, $a \mid c$. De même, $b \mid c$.
• Supposons que $a \mid c$ et $b \mid c$. Donc, il existe $(k,k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $c = ka$ et $c = k'b$.
D'autre part, a et b sont premiers entre eux et donc, d'après le théorème de Bézout, il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. On multiplie les deux membres de cette égalité par c et on obtient

$$c = acu + bcv = ak'bu + bkav = ab(k'u + kv).$$

Puisque $k'u + kv$ est un entier relatif, ceci montre que ab divise c. Finalement

$$(a \mid c \text{ et } b \mid c) \Leftrightarrow ab \mid c.$$

3) (a) 1ère solution. Puisque $11 + 6 \equiv 0 \pmod{17}$ et $11 + 4 \equiv 0 \pmod{15}$, on a $-11 \equiv 6 \pmod{17}$ et $-11 \equiv 4 \pmod{15}$. Une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$ est $x_0 = -11$.

2ème solution. Soit $x \in \mathbb{Z}$.

$$\left\{\begin{array}{l} x \equiv 6 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists (k,k') \in \mathbb{Z}^2/ \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 17k \\ x = 4 + 15k' \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists (k,k') \in \mathbb{Z}^2/ \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 17k \\ -17k + 15k' = 2 \end{array}\right.$$

Une solution particulière de l'équation $-17k + 15k' = 2$ est le couple $(-1,-1)$, un tel couple pouvant dans le cas général être obtenu par l'algorithme d'Euclide. Une solution particulière du système est alors $x_0 = 6 + 17 \times (-1) = -11$.

(b) Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. $15 = 3 \times 5$ et 17 sont deux entiers premiers entre eux.

$$\left\{\begin{array}{l} x \equiv 6 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \equiv x_0 \pmod{17} \\ x \equiv x_0 \pmod{15} \end{array}\right. \Leftrightarrow 15 \mid x - x_0 \text{ et } 17 \mid x - x_0$$
$$\Leftrightarrow 15 \times 17 \mid x - x_0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -11 + 255k.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-11 + 255k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{244 + 255k,\ k \in \mathbb{Z}\}.}$$

